

## Soluzioni alla prova scritta del 24/2/2011

Esercizio 1.

(a) La prima asserzione è falsa (la valutazione  $v(\varphi) = 0$ ,  $v(\psi) = 1$  rende valida  $\varphi \Rightarrow \psi$  ma non  $\psi \Rightarrow \varphi$ ), la seconda è vera (basta costruire un semplice albero di derivazione), la terza è falsa (per lo stesso motivo per cui è falsa la prima), la quarta è vera (basta costruire un semplice albero di derivazione).

(b)  $\Gamma$  è consistente in quanto la valutazione definita da

$$v(p) = 0, \quad v(q) = 1, \quad v(r) = 0, \quad v(s) = 0$$

soddisfa tutte le formule di  $\Gamma$ . Questa valutazione soddisfa anche  $\neg r \wedge \neg s$ , e quindi  $\Gamma \cup \{\neg r \wedge \neg s\}$  è consistente.

(c) Si vedano le dispense.

Esercizio 2.

(a) Per la prima formula, si consideri l'albero

$$\frac{\frac{\frac{[\forall x\varphi(x, y)]_1}{\varphi(x, y)}}{\exists y\varphi(x, y)}}{\frac{[\exists y\forall x\varphi(x, y)]_2}{\forall x\exists y\varphi(x, y)}} \exists_{E,1} \Rightarrow_{I,2} \frac{\forall x\exists y\varphi(x, y)}{\exists y\forall y\varphi(x, y) \Rightarrow \forall x\exists y\varphi(x, y)}$$

Per la seconda formula, si consideri l'albero

$$\frac{\frac{\frac{[\forall x(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))]}{\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)]_3}{\psi(x)}}{\frac{[\exists x\varphi(x)]_2}{\exists x\psi(x)}} \exists_{E,1} \Rightarrow_{I,2} \frac{\exists x\varphi(x) \Rightarrow \exists x\psi(x)}{\forall x(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)) \Rightarrow (\exists x\varphi(x) \Rightarrow \exists x\psi(x))} \Rightarrow_{I,3}$$

(b) Semplificando la definizione di validità di una formula in una struttura, si vede che la formula è valida se e solo se per ogni  $n \in \mathbb{N}$  esistono  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$  tali che

$$n < m_1 < m_2$$

e per cui non esiste  $p \in \mathbb{N}$  tale che

$$m_1 < p < m_2$$

Quest'ultima affermazione è chiaramente vera, in quanto, dato  $n \in \mathbb{N}$ , possiamo considerare  $m_1 = n + 1$  e  $m_2 = n + 2$ .

(c) Si vedano le dispense.

Esercizio 3.

(a) Si definisca  $a =_{\text{def}} 0$  e  $g(n, p) = n$ . Dalla definizione di  $h$  segue che

$$h(0) = a = 0$$

e

$$h(n+1) = g(n, h(n)) = n$$

come volevasi dimostrare.

(b) Un programma che fa quanto richiesto è il seguente:

$S_0$  Termina

$S_1$  Se  $R_2 = 0$  allora esegui  $S_0$  altrimenti  $R_2 := R_2 - 1$  ed esegui  $S_2$

$S_2$  Se  $R_1 = 0$  allora esegui  $S_3$  altrimenti  $R_1 := R_1 - 1$  ed esegui  $S_1$

$S_3$   $R_1 := R_1 + 1$  ed esegui  $S_3$ .

(c) È facile verificare che sia  $S$  che  $\mathbb{N} \setminus S$  (che è l'insieme dei numeri dispari) sono ricorsivamente enumerabili (in quanto immagine di funzioni ricorsive). Da questo segue che  $S$  è ricorsivo. Alternativamente, si può dimostrare che la funzione caratteristica di  $S$  è calcolabile (scrivendo un opportuno programma per macchine a registri), da cui segue che essa è ricorsiva, che per definizione significa che  $S$  è ricorsivo.

Esercizio 4.

(a) Si vedano le dispense.

(b) Si consideri  $X = \{1, 2\}$  e  $Y = \{2, 3\}$ . Sia  $S =_{\text{def}} \{1, 3\}$ . Abbiamo  $S \subseteq X \cup Y$  e quindi  $S \in \mathcal{P}(X \cup Y)$ , ma  $S \notin \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y)$ . Infatti,  $S \notin \mathcal{P}(X)$  e  $S \notin \mathcal{P}(Y)$ , visto che  $S \not\subseteq X$  e  $S \not\subseteq Y$ .

(c) Sia  $A$  un insieme tale che  $\text{card}(A) = \kappa$ . Per dimostrare quanto richiesto, è sufficiente dimostrare che esiste una funzione iniettiva  $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ , in quanto  $2^\kappa = \text{card}(\mathcal{P}(A))$ . Una tale funzione può essere definita ponendo  $f(a) =_{\text{def}} \{a\}$ .