



$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{\varphi(x) \wedge \neg\psi(x)}{\neg\psi(x)}}{\exists x(\varphi(x) \wedge \neg\psi(x))} \quad \frac{\frac{\frac{\forall x(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))}{\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)} \quad \frac{\varphi(x) \wedge \neg\psi(x)}{\varphi(x)}}{\psi(x)}}{\perp}}{\perp}}{\frac{\neg\forall x(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))}{\exists(\varphi(x) \wedge \neg\psi(x)) \Rightarrow \neg\forall x(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))}}
\end{array}$$

- (b) Dalla definizione di validità di una formula in una struttura, si ha che la formula in questione è valida in  $(P, <)$  se e solo se esistono elementi  $u_1, u_2, v_1, v_2 \in P$  tali che  $u_1 < v_1 < v_2 < u_2$ . Dal diagramma si ha che  $e < d < c < a$ , e quindi la formula è valida.
- (c) Si vedano le dispense.

Esercizio 3.

- (a) Si definisca  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ponendo

$$f(m) =_{\text{def}} m^2$$

e  $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ponendo

$$g(m, n, p) = p + 2m + 2n + 1$$

È chiaro che entrambe sono funzioni ricorsive in quanto composte di funzioni ricorsive. Dimostriamo che  $h(m, n) = (m + n)^2$  per ogni  $m, n \in \mathbb{N}$  per induzione su  $n$ . Nel caso base, abbiamo

$$h(m, 0) = f(m) = m^2 = (m + 0)^2$$

come volevasi. Per il passo induttivo, supponiamo  $h(m, n) = (m + n)^2$  e dimostriamo che  $h(m, n + 1) = (m + (n + 1))^2$ . Abbiamo:

$$\begin{aligned}
h(m, n + 1) &= g(m, n, h(m, n)) \\
&= h(m, n) + 2m + 2n + 1 \\
&= (m + n)^2 + 2m + 2n + 1 \\
&= (m + (n + 1))^2
\end{aligned}$$

Infatti,

$$(m + (n + 1))^2 = ((m + n) + 1)^2 = (m + n)^2 + 2(m + n) + 1$$

- (b) Un programma che fa quanto richiesto é il seguente:

$S_0$  Termina

$S_1$  Se  $R_3 = 0$  allora esegui  $S_0$  altrimenti  $R_3 := R_3 - 1$  ed esegui  $S_2$

$S_2$   $R_1 := R_1 + 1$  ed esegui  $S_3$

$S_3$   $R_2 := R_1 + 1$  ed esegui  $S_1$

Il programma decrementa progressivamente il valore in  $R_3$ , incrementando ad ogni passo i valori in  $R_1$  e  $R_2$ , fino a quando il valore in  $R_3$  é zero.

(c) Si vedano le dispense.

Esercizio 4.

(a) Si vedano le dispense.

(b) Supponiamo  $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(Y)$ . Dobbiamo dimostrare che  $X \subseteq Y$ . Si osservi che  $X \subseteq X$  e quindi  $X \in \mathcal{P}(X)$  e quindi, dall'ipotesi che  $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(Y)$ , abbiamo  $X \in \mathcal{P}(Y)$ , il che significa  $X \subseteq Y$ , come richiesto. Un altro modo per risolvere l'esercizio é il seguente. Dobbiamo dimostrare che per ogni  $x \in X$  si ha  $x \in Y$ . Dato  $x \in X$ , abbiamo  $\{x\} \subseteq X$  e quindi  $\{x\} \in \mathcal{P}(X)$ , da cui segue  $\{x\} \in \mathcal{P}(Y)$ , per l'ipotesi che  $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(Y)$ . Ma questo significa  $\{x\} \subseteq Y$ , da cui segue  $x \in Y$ , come volevasi dimostrare.

(c) Svolto in classe.