ELEMENTI DI LOGICA MATEMATICA – Soluzioni alla prova scritta del 6/10/2010.

COMPITO B

Esercizio 1.

(a)

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \lor \neg\psi \qquad \dfrac{\neg\chi \qquad \dfrac{\varphi \Rightarrow \chi \qquad [\varphi]_1}{\chi}}{\bot} \qquad \dfrac{[\neg\psi]_2 \qquad [\psi]_3}{\bot}}{\bot}\,\lor_{E,1,2}}{\neg\psi}\,\Rightarrow_{I,3}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi \land \neg\psi]_2}{\neg\psi} \qquad \dfrac{[\neg\varphi \Rightarrow \psi]_1 \qquad \dfrac{[\neg\varphi \land \neg\psi]_2}{\neg\varphi}}{\psi}}{\bot}}{\neg(\neg\varphi \Rightarrow \psi)}\,\Rightarrow_{I,1}}{(\neg\varphi \land \neg\psi) \Rightarrow \neg(\neg\varphi \Rightarrow \psi)}\,\Rightarrow_{I,2}$$

(b) Supponiamo che $\Gamma \models \varphi$. Dimostriamo che $\Gamma \cup \Gamma' \models \varphi$. Sia v una valutazione che soddisfa tutte le formule di $\Gamma \cup \Gamma'$. Ma allora v soddisfa tutte le formule di Γ e quindi l'ipotesi $\Gamma \models \varphi$ implica che $v(\varphi) = 1$, come volevasi dimostrare.

(c) La soluzione è analoga a quella dell'esercizio corrispondente nel Compito A.

Esercizio 2.

(a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists x\varphi(x)]_2 \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall x(\varphi(x) \Rightarrow \psi)]_3}{\varphi(x) \Rightarrow \psi} \qquad [\varphi(x)]_1}{\psi}}{\psi}\,\exists_{E,1}}{\exists x\varphi(x) \Rightarrow \psi}\,\Rightarrow_{I,1}}{\forall x(\varphi(x) \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\exists x\varphi(x) \Rightarrow \psi)}\,\Rightarrow_{I,3}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists x(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))]_2 \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)]_1 \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall x(\varphi(x) \land \neg\psi(x))]_3}{\varphi(x) \land \neg\psi(x)}}{\varphi(x)}}{\psi(x)} \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall x(\varphi(x) \land \neg\psi(x))]_3}{\varphi(x) \land \neg\psi(x)}}{\neg\psi(x)}}{\bot}}{\bot}\,\exists_{E,1}}{\neg\exists x(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))}\,\Rightarrow_{I,2}}{\forall x(\varphi(x) \land \neg\psi(x)) \Rightarrow \neg\exists x(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))}\,\Rightarrow_{I,3}$$

(b) Se la formula fosse valida in $(P, <)$, si avrebbe che per ogni $a_1, a_2 \in P$ esiste $b \in P$ tale che $a_1 \leq b$ e $a_2 \leq$. Ma se consideriamo gli elementi p_1 e p_2, non esiste alcun elemento $b \in P$ tale che $p_1 \leq b$ e $p_2 \leq b$.

(c) Si vedano le dispense.

ESERCIZIO 3.

(a) Le definizioni richieste sono

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ g(n,p) &= p + 3n^2 + 9n + 7 \end{aligned}$$

Dimostriamo per induzione che $h(n) = (n+1)^3$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per il caso base, consideriamo $n = 0$. Da un parte, abbiamo

$$\begin{aligned} h(0) &= a \\ &= 1 \end{aligned}$$

D'altra parte, $(0+1)^3 = 1$, come volevasi dimostrare. Per il passo induttivo, supponiamo che $h(n) = (n+1)^3$ e dimostriamo che $h(n+1) = ((n+1)+1)^3$. Da una parte abbiamo

$$\begin{aligned} h(n+1) &= g(n, h(n)) \\ &= h(n) + (3n^2 + 9n + 7) \\ &= (n+1)^3 + (3n^2 + 9n + 7) \\ &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (3n^2 + 9n + 7) \\ &= n^3 + 6n^2 + 12n + 8 \end{aligned}$$

D'altra parte, abbiamo

$$\begin{aligned} ((n+1)+1)^3 &= (n+2)^3 \\ &= n^3 + 6n^2 + 12n + 8 \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. Questo conclude la dimostrazione.

(b) Si vedano le dispense.

ESERCIZIO 4.

(a) Si vedano le dispense.

(b) Se $p \in \mathcal{P}(a) \cup \mathcal{P}(b)$, allora $p \subseteq a$ o $p \subseteq b$. Dimostriamo che in entrambi i casi, si ha che $p \in \mathcal{P}(a \cup b)$, ovvero che $p \subseteq a \cup b$. Se $p \subseteq a$ allora $p \subseteq a \cup b$. Analogamente, se $p \subseteq b$ allora $p \subseteq a \cup b$.

(c) Svolto a lezione.