

Soluzione degli Esercizi di Revisione V

Nicola Gambino

4 Luglio 2010

Esercizio 1

(a)

$$\frac{\varphi_1 \vee \varphi_2 \quad \frac{\varphi_1 \Rightarrow \psi \quad [\varphi_1]_1}{\psi} \quad \frac{\varphi_2 \Rightarrow \psi \quad [\varphi_2]_2}{\psi}}{\psi} \vee_{E,1,2}$$

$$\frac{\neg \chi \quad \frac{\psi \Rightarrow \chi \quad \frac{\varphi \Rightarrow \psi \quad [\varphi]_1}{\psi}}{\chi}}{\frac{\perp}{\neg \varphi} \Rightarrow_{I,1}}$$

(b) L'affermazione è falsa. Un controesempio è dato da $\Gamma = \{p, q, r\}$. Infatti, esiste una valutazione che non soddisfa alcuna delle sue formule, ma Γ è consistente.

Si ricordi che un insieme Γ è consistente se e solo se esiste una valutazione v che soddisfa tutte le formule di Γ . Quindi, un insieme Γ è inconsistente se e solo se non esiste alcuna valutazione v che soddisfa tutte le formule di Γ . Equivalentemente, Γ è inconsistente se e solo se per ogni valutazione v esiste almeno una formula di Γ non soddisfatta da v .

(c) Γ non è consistente. Infatti se fosse consistente, esisterebbe una valutazione v che soddisfa tutte le formule di Γ . Dimostriamo che una tale valutazione non può esistere. Infatti, se esistesse, dovrebbe valere $v(q) = 0$ e $v(r) = 0$, in modo che $v(\neg q \wedge \neg r) = 1$. Ma allora avremmo $v(s) = 1$ visto che deve valere $v(\neg q \Rightarrow s) = 1$. Da questo segue che $v(p) = 0$, in quanto dobbiamo avere $v(s \wedge \neg r \Rightarrow \neg p) = 1$. Da $v(p) = 0$ e $v(s) = 1$, avremmo però $v(p \vee \neg s) = 0$.

Esercizio 2

(a)

$$\frac{\frac{\frac{\forall x(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))}{\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)} \quad [\varphi(x)]_1}{[\exists x\varphi(x)]_2} \quad \frac{\exists x\psi(x)}{\exists x\psi(x)} \quad \exists_{E,1}}{\exists x\psi(x)} \Rightarrow_{I,2} \frac{\exists x\varphi(x) \Rightarrow \exists x\psi(x)}{\exists x\varphi(x) \Rightarrow \exists x\psi(x)}$$

(b) Per una struttura in cui la formula non sia valida, basta considerare un insieme D , un sottoinsieme proprio $S \subsetneq D$ e un elemento $d \in D$ tale che $d \in S$. Infatti, possiamo fissare $\llbracket P \rrbracket =_{\text{def}} S$ e $\llbracket a \rrbracket =_{\text{def}} d$. Con queste definizioni, si verifica facilmente che $\llbracket P(a) \rrbracket = 1$. Tuttavia, essendo $S \subsetneq D$, esiste anche $d' \in D$ tale che $d' \notin S$ e quindi $\llbracket \forall xP(x) \rrbracket = 0$, da cui segue

$$\llbracket P(a) \Rightarrow \forall xP(x) \rrbracket = 0.$$

Per una struttura in cui la formula sia valida, basta considerare un insieme D , un sottoinsieme $S \subseteq D$ ed un elemento $d \in D$ tale che $d \notin S$. Infatti, possiamo fissare $\llbracket a \rrbracket = d$, in modo che $\llbracket P(a) \rrbracket = 0$, da cui segue

$$\llbracket P(a) \Rightarrow \forall xP(x) \rrbracket = 1.$$

Esercizio 3

(a) S_0 Termina

S_1 Se $R_1 = 0$ allora esegui S_0 altrimenti $R_1 := R_1 - 1$ ed esegui S_2

S_2 $R_2 := R_2 + 1$ ed esegui S_1

S_3 Se $R_2 = 0$ allora esegui S_0 altrimenti $R_2 := R_2 - 1$ ed esegui S_4

S_4 $R_1 := R_1 + 1$ ed esegui S_5

S_5 $R_1 := R_1 + 1$ ed esegui S_3

(b) L'idea alla base della definizione del programma è che

$$2^n = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n \text{ volte}}.$$

Prima copiamo il valore di R_1 in un registro sufficientemente lontano R_k , azzerando il valore di R_1 . Poi incrementiamo il valore di R_1 , in modo che sia 1. A questo punto iniziamo un ciclo di istruzioni, da cui usciamo solo quando il valore di R_k è uguale a 0. In particolare, se R_k è già uguale a 0, terminiamo subito. In questo caso, il valore di R_1 è 1, come deve essere, visto che $1 = 2^0$. Nel ciclo di istruzioni, decrementiamo di 1 il valore di R_k ed eseguiamo il programma che calcola la funzione al punto (a), raddoppiando quindi il valore di R_1 .

- (c) Definiamo f e g ponendo $f(m) = m^3$ e $g(m, n, p) = p + 3n^2 + 3n + 1$. La verifica che la funzione h soddisfa la proprietà richiesta è una semplice dimostrazione per induzione.

Esercizio 4

- (a) Cominciamo col dimostrare che $f \circ g$ è uguale alla funzione identità sull'insieme $\mathcal{P}(a_1 + a_2)$. Dobbiamo quindi dimostrare che per ogni sottoinsieme $p \subseteq a_1 + a_2$ si ha $p = (f \circ g)(p)$. Dalla definizione di f e g , questo significa dimostrare che

$$p = \{\iota_1(x) \mid x \in a_1 \wedge \iota_1(x) \in p\} \cup \{\iota_2(x) \mid x \in a_2 \wedge \iota_2(x) \in p\}$$

L'inclusione ' \subseteq ' è ovvia, mentre quella ' \supseteq ' segue dall'osservazione che, essendo $p \subseteq a_1 + a_2$, ogni suo elemento ha la forma $\iota_1(x)$, con $x \in a_1$, oppure $\iota_2(x)$, con $x \in a_2$.

Rimane da dimostrare che $g \circ f$ è la funzione identità sull'insieme $\mathcal{P}(a_1) \times \mathcal{P}(a_2)$. Dobbiamo quindi dimostrare che per ogni coppia di sottoinsiemi (p_1, p_2) , ove $p_1 \subseteq a_1$ e $p_2 \subseteq a_2$, si ha

$$(p_1, p_2) = (g \circ f)(p_1, p_2),$$

ovvero

$$(p_1, p_2) = (\{x \in a_1 \mid \iota_1(x) \in f(p_1, p_2)\}, \{x \in a_2 \mid \iota_2(x) \in f(p_1, p_2)\})$$

Questo vale se e solo se

$$p_1 = \{x \in a_1 \mid \iota_1(x) \in f(p_1, p_2)\}$$

e

$$p_2 = \{x \in a_2 \mid \iota_2(x) \in f(p_1, p_2)\}$$

Per la prima uguaglianza, l'inclusione ' \subseteq ' vale perchè se $x \in p_1$ allora $\iota_1(x) \in f(p_1, p_2)$, per la definizione di f , mentre l'inclusione ' \supseteq ' vale perchè se $x \in a_1$ è tale che $\iota_1(x) \in f(p_1, p_2)$, questo può valere se e solo se $\iota_1(x) \in p_1$. La seconda uguaglianza si dimostra in modo analogo.

- (b) Si ricordi che, in generale, se $\kappa = \text{card}(a)$ allora $2^\kappa = \text{card}(\mathcal{P}(a))$, ove $\mathcal{P}(a)$ è l'insieme delle parti di a , ovvero l'insieme che ha come elementi tutti e soli i sottoinsiemi di a . Per risolvere l'esercizio, si considerino due insiemi a_1 e a_2 tali che $\kappa_1 = \text{card}(a_1)$ e $\kappa_2 = \text{card}(a_2)$. Abbiamo

$$2^{\kappa_1} \cdot 2^{\kappa_2} = \text{card}(\mathcal{P}(a_1) \times \mathcal{P}(a_2))$$

e

$$2^{\kappa_1 + \kappa_2} = \text{card}(\mathcal{P}(a_1 + a_2))$$

Quindi, l'uguaglianza richiesta segue una volta che dimostriamo l'esistenza di una biiezione tra $\mathcal{P}(a_1) \times \mathcal{P}(a_2)$ e $\mathcal{P}(a_1 + a_2)$, ma questa è stata stabilita al punto (a).