

Soluzione degli Esercizi di Revisione IV

Nicola Gambino

3 Giugno 2010

Esercizio 1.

(i) Si assuma che $J \subseteq I$. Dobbiamo dimostrare

$$\forall x \left(x \in \bigcup_{j \in J} a_j \Rightarrow x \in \bigcup_{i \in I} a_i \right).$$

Sia $x \in \bigcup_{j \in J} a_j$. Per la definizione dell'unione di una famiglia di insiemi, esiste $j \in J$ tale che $x \in a_j$. Dobbiamo dimostrare che esiste $i \in I$ tale che $x \in a_i$. Ma l'elemento $i \in I$ richiesto è dato da j stesso, che appartiene ad I in quanto $J \subseteq I$.

(ii) Si assuma che $J \subseteq I$. Dobbiamo dimostrare

$$\forall x \left(x \in \bigcap_{i \in I} a_i \Rightarrow x \in \bigcup_{j \in J} a_j \right).$$

Sia $x \in \bigcap_{i \in I} a_i$. Per la definizione dell'intersezione di una famiglia di insiemi, per ogni $i \in I$, vale $x \in a_i$. Dobbiamo dimostrare che $x \in \bigcup_{j \in J} a_j$, ovvero che per ogni $j \in J$ vale $x \in a_j$. Dato $j \in J$, si ha $j \in I$ in quanto $J \subseteq I$, e quindi $x \in a_j$ per l'ipotesi.

Esercizio 2. Seguendo il suggerimento, definiamo f ponendo

$$f(x) =_{\text{def}} (f_1(x), f_2(x)).$$

Per dimostrare che $\pi_1 \circ f = f_1$, dimostriamo che per ogni $x \in a$ vale

$$\pi_1 \circ f(x) = f_1(x).$$

Dato $x \in a$, abbiamo

$$\begin{aligned} \pi_1 \circ f(x) &= \pi_1(f(x)) \\ &= \pi_1(f_1(x), f_2(x)) \\ &= f_1(x). \end{aligned}$$

La dimostrazione che $\pi_2 \circ f = f_2$ è analoga. Per dimostrare l'unicità di f , supponiamo che esista $g : a \rightarrow b_1 \times b_2$ tale che $\pi_1 \circ g = f_1$ e $\pi_2 \circ g = f_2$ e dimostriamo che $f = g$, ovvero che per ogni $x \in a$, vale $f(x) = g(x)$. Visto che, per definizione, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, dobbiamo dimostrare che per ogni $x \in a$, vale

$$(f_1(x), f_2(x)) = g(x).$$

Per le proprietà del prodotto cartesiano, questo vale se e solo se

$$\pi_1(f_1(x), f_2(x)) = \pi_1(g(x)) \quad \text{e} \quad \pi_2(f_1(x), f_2(x)) = \pi_2(g(x)).$$

La prima uguaglianza vale in quanto

$$\begin{aligned} \pi_1(f_1(x), f_2(x)) &= f_1(x) \\ &= (\pi_1 \circ g)(x) \\ &= \pi_1(g(x)), \end{aligned}$$

ove nel secondo passaggio abbiamo usato l'ipotesi che $\pi_1 \circ g = f_1$. La seconda uguaglianza può essere dimostrata in modo analogo.

Esercizio 3.

(i) Siano a_1, a_2, b_1, b_2 insiemi tali che

$$\kappa_1 = \text{card}(a_1), \quad \kappa_2 = \text{card}(a_2), \quad \lambda_1 = \text{card}(b_1), \quad \lambda_2 = \text{card}(b_2).$$

Per l'ipotesi che $\kappa_1 \leq \lambda_1$ e $\kappa_2 \leq \lambda_2$, esistono funzioni iniettive $i_1 : a_1 \rightarrow b_1$ e $i_2 : a_2 \rightarrow b_2$. Per dimostrare che $\kappa_1 \cdot \kappa_2 \leq \lambda_1 \cdot \lambda_2$, dimostriamo che esiste una funzione iniettiva

$$i : a_1 \times a_2 \rightarrow b_1 \times b_2.$$

Definiamo i ponendo $i(x_1, x_2) =_{\text{def}} (i_1(x_1), i_2(x_2))$. Per dimostrare l'iniettività di i , supponiamo che $i(x_1, x_2) = i(y_1, y_2)$ e dimostriamo che $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. In base alla definizione di i , l'ipotesi ci dice che abbiamo la seguente uguaglianza tra coppie ordinate:

$$(i_1(x_1), i_2(x_2)) = (i_1(y_1), i_2(y_2)).$$

Ma questo vale se e solo se abbiamo

$$i_1(x_1) = i_1(y_1), \quad i_2(x_2) = i_2(y_2).$$

Dall'iniettività di i_1 e i_2 segue che $x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2$, il che a sua volta implica che $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$, come volevasi dimostrare.

(ii) Siano a, b, c tre insiemi tali che

$$\kappa = \text{card}(a), \quad \lambda = \text{card}(b), \quad \mu = \text{card}(c)$$

Supponiamo che esista una funzione iniettiva $j : b \rightarrow c$ e dimostriamo che esiste una funzione iniettiva $i : b^a \rightarrow c^a$. La funzione i è definita ponendo

$$i(f) =_{\text{def}} j \circ f,$$

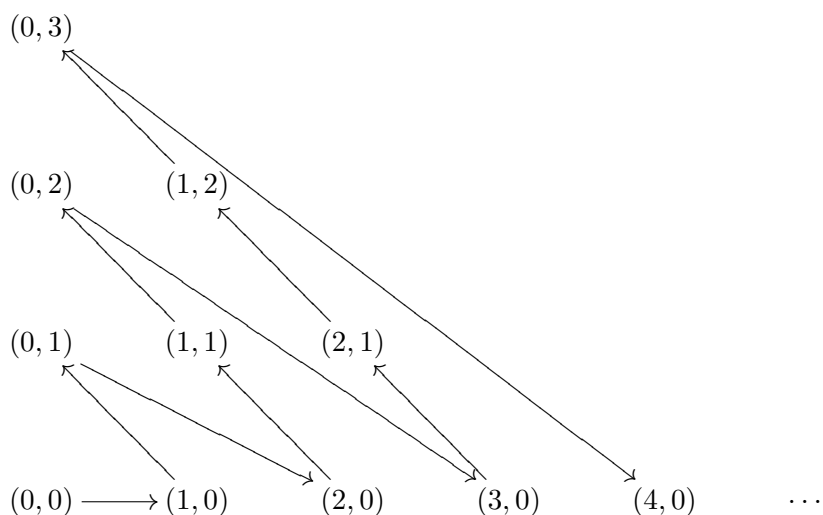
ovvero i mappa una funzione $f : a \rightarrow b$ nella funzione composta $j \circ f : a \rightarrow c$. Dobbiamo dimostrare che i è iniettiva. Supponiamo che $i(f_1) = i(f_2)$ e dimostriamo che $f_1 = f_2$. Dall'ipotesi, per la definizione di i , ricaviamo che $j \circ f_1 = j \circ f_2$. Questo significa che per ogni $x \in a$, si ha

$$j(f_1(x)) = j(f_2(x)).$$

Per l'iniettività di j , abbiamo che $f_1(x) = f_2(x)$. Abbiamo quindi dimostrato che per ogni $x \in a$, $f_1(x) = f_2(x)$, e quindi che $f_1 = f_2$, come volevasi.

Esercizio 4.

(i) Visto che \aleph_0 è tale che $\aleph_0 = \text{card}(\mathbb{N})$, l'uguaglianza da dimostrare segue una volta che dimostriamo che esiste una biiezione tra \mathbb{N} e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. La biiezione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ richiesta può essere visualizzata nel modo seguente:



Ovvero $f(0) = (0, 0), f(1) = (1, 0), f(2) = (0, 1), f(3) = (2, 0), \dots$

- (ii) Visto che \aleph_0 è tale che $\aleph_0 = \text{card}(\mathbb{N})$, l'uguaglianza da dimostrare segue una volta che dimostriamo che esiste una biiezione tra \mathbb{N} e $\mathbb{N} + \mathbb{N}$. Visto che gli elementi di $\mathbb{N} + \mathbb{N}$ sono della forma $\iota_1(n)$ o $\iota_2(n)$, ove $n \in \mathbb{N}$, possiamo definire una funzione $f : \mathbb{N} + \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ponendo

$$f(\iota_1(n)) = 2n, \quad f(\iota_2(n)) = 2n + 1.$$

Per dimostrare che f è biiettiva, definiamo $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} + \mathbb{N}$ ponendo

$$g(m) = \begin{cases} \iota_1(n) & \text{se } m \text{ è pari e } m = 2n \\ \iota_2(n) & \text{se } m \text{ è dispari e } m = 2n + 1. \end{cases}$$

La verifica che f e g sono mutualmente inverse è omessa.