Soluzione della prova scritta del 18/4/2011

Esercizio 1

(a) Per dimostrare quanto richiesto, è sufficiente costruire i seguenti alberi.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \psi \vee \chi \qquad [\varphi]_3}{\psi \vee \chi} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\psi \qquad [\psi]_1}{\bot}}{\chi} \qquad \dfrac{[\chi]_2}{\chi}}{\chi}\,\vee_{E,1,2}}{\varphi \Rightarrow \chi}\,\Rightarrow_{I,3}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]_2 \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi \Leftrightarrow \psi]_5}{\psi \Rightarrow \varphi} \qquad [\psi]_1}{\varphi}}{\bot}}{\neg\psi}\,\Rightarrow_{I,1}}{\neg\varphi \Rightarrow \neg\psi}\,\Rightarrow_{I,2} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\psi]_4 \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi \Leftrightarrow \psi]_5}{\varphi \Rightarrow \psi} \qquad [\varphi]_3}{\psi}}{\bot}}{\neg\varphi}\,\Rightarrow_{I,3}}{\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi}\,\Rightarrow_{I,4}}{\neg\varphi \Leftrightarrow \neg\psi}}{(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow (\neg\varphi \Leftrightarrow \neg\psi)}\,\Rightarrow_{I,5}$$

(b) Per dimostrare che Γ è inconsistente, verifichiamo che non esiste alcuna valutazione che soddisfa Γ. A tal fine, supponiamo che esista una valutazione V che soddisfa Γ e deriviamo un assurdo. Se V soddisfa Γ, allora $V(\neg r) = 1$ e quindi $V(r) = 0$. Allora, dovendo valere $V(r \vee s) = 1$, deve valere $V(s) = 1$. Da questo segue che $V(p \wedge \neg q) = 1$, perchè altrimenti avremmo $V(s \Rightarrow p \wedge \neg q) = 0$, contro l'ipotesi che V soddisfa Γ. Da $V(p \wedge \neg q) = 1$ segue che $V(p) = 1$ e $V(q) = 0$. Ma allora avremmo $V(\neg p \vee q) = 0$, una contraddizione.

Sia $\Gamma' =_{\text{def}} \{r \vee s\,, s \Rightarrow p \wedge \neg q\,, \neg r\}$. Esiste una valutazione che soddisfa Γ', data da

$$V(p) = 1\,, \quad V(q) = 0\,, \quad V(r) = 0\,, \quad V(s) = 1\,,$$

e quindi Γ' è consistente, come richiesto.

(c) Se $\Gamma \vdash \varphi$ allora esiste un albero di derivazione, chiamiamolo con conclusione φ e il cui insieme di premesse è contenuto in Γ. Sia T un tale albero e chiamiamo Γ_T il suo insieme di premesse, per cui vale $\Gamma_T \subseteq \Gamma$. Dall'ipotesi che $\Gamma \subseteq \Gamma'$ segue che T è un albero di derivazione con conclusione φ e insieme di premesse contenuto in Γ', visto che $\Gamma_T \subseteq \Gamma \subseteq \Gamma'$. Abbiamo quindi dimostrato che esiste un albero di derivazione con premesse contenute in Γ' e conclusione φ, ovvero $\Gamma' \vdash \varphi$, come volevasi dimostrare.

Esercizio 2

(a) Per dimostrare quanto richiesto, si considerino i seguenti alberi.

$$\dfrac{\exists x(\varphi(x) \lor \psi(x)) \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi(x) \lor \psi(x)]_3 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \neg\varphi(x)}{\neg\varphi(x)} \qquad [\varphi(x)]_1}{\bot}}{\psi(x)} \qquad \dfrac{[\psi(x)]_2}{\psi(x)}}{\psi(x)}\lor_{E,1,2}}{\exists x \psi(x)}}{\exists x \psi(x)}\exists_{E,3}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))}{\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)} \qquad \dfrac{\forall x \varphi(x)}{\varphi(x)}}{\psi(x)}}{\forall x \psi(x)}$$

(b) Innanzitutto, si verifica che la formula è soddisfatta se e solo se l'ordine parziale $(P, \leq)$ soddisfa la seguente proprietà.

($*$) Esistono $u, v \in P$ per cui esistono $w_1, w_2 \in P$ tali che $u < w_1 < v$, $u < w_2 < v$ e $w_1 \neq w_2$.

Se consideriamo gli elementi g e b abbiamo che sia $g < d < b$, $g < e < b$ e $d \neq b$, quindi la proprietà ($*$) è vera, da cui segue che la formula in questione è soddisfatta.

(c) Si vedano le dispense.

Esercizio 3

(a) Definiamo $a =_{\text{def}} 1$ e

$$\begin{array}{rccc} g\colon & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & (n, p) & \mapsto & 2 \cdot p \end{array}$$

Verifichiamo per induzione la proprietà richiesta. Per il caso base, dobbiamo verificare che $h(0) = 2^0$. Ma abbiamo:

$$h(0) = a = 1 = 2^0$$

Per il passo induttivo dobbiamo dimostrare che, per un generico $n \in \mathbb{N}$, se $h(n) = 2^n$ allora $h(n+1) = 2^{n+1}$. Supponiamo allora $h(n) = 2^n$. Abbiamo:

$$h(n+1) = g(n, h(n)) = 2 \cdot h(n) = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

come volevasi dimostrare.

(b) Si vedano le dispense.

(c) È facile verificare che sia S che $\mathbb{N} \setminus S$ sono ricorsivamente enumerabili, da cui segue che S è ricorsivo.

Esercizio 4

(a) Si vedano le dispense.

(b) Si osservi che $S \in \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y)$ se e solo se $S \subseteq X$ e $S \subseteq Y$, il che vale se e solo se $S \subseteq X \cap Y$, ovvero $S \in \mathcal{P}(X \cap Y)$.

(c) Sia a un insieme tale che $\mathrm{card}(a) = \kappa$. Vale $\kappa \leq 2^\kappa$ se e solo se esiste una funzione iniettiva $f : a \to \mathcal{P}(a)$, in quanto $2^\kappa = \mathcal{P}(a)$. Una funzione f come quella richiesta può essere definita ponendo $f(x) =_{\mathrm{def}} \{x\}$.