

ESERCIZIO 1.

(a) Per la prima formula, si consideri il seguente albero:

$$\frac{\frac{\frac{[\varphi \wedge \neg\psi]_2}{\neg\psi}}{\quad} \quad \frac{\frac{[\varphi \Rightarrow \psi]_1}{\psi}}{\quad} \quad \frac{[\varphi \wedge \neg\psi]_2}{\varphi}}{\frac{\perp}{\neg(\varphi \Rightarrow \psi)} \Rightarrow_{I,1}} \Rightarrow_{I,2} \frac{(\varphi \wedge \neg\psi) \Rightarrow \neg(\varphi \Rightarrow \psi)}$$

Per la seconda formula, si consideri il seguente albero:

$$\frac{\frac{[(\varphi \Rightarrow \psi_1) \vee (\varphi \Rightarrow \psi_2)]_4}{\quad} \quad \frac{\frac{[\varphi \Rightarrow \psi_1]_1 \quad [\varphi]_3}{\psi_1}}{\psi_1 \vee \psi_2} \quad \frac{\frac{[\varphi \Rightarrow \psi_2]_2 \quad [\varphi]_3}{\psi_2}}{\psi_1 \vee \psi_2}}{\frac{\psi_1 \vee \psi_2}{\varphi \Rightarrow \psi_1 \vee \psi_2} \Rightarrow_{I,3}} \vee_{E,1,2} \frac{((\varphi \Rightarrow \psi_1) \vee (\varphi \Rightarrow \psi_2)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi_1 \vee \psi_2)}{\Rightarrow_{I,4}}$$

(b)  $\Gamma$  implica semanticamente  $\varphi$  significa che ogni valutazione che soddisfa tutte le formule di  $\Gamma$  soddisfa anche  $\varphi$ .

(c) Definiamo

$$\Gamma' =_{\text{def}} \{ \neg q \wedge \neg r, s \Rightarrow (\neg p \vee q), s \wedge \neg r, \neg r \Rightarrow p \}.$$

La verifica che questo insieme è inconsistente può essere fatta con due metodi, entrambi corretti, che ora illustriamo.

*Primo metodo.* Il primo modo è di verificare che non esiste alcuna valutazione che soddisfa ogni formula di  $\Gamma'$ . Infatti, supponiamo che esista una valutazione  $v$  che soddisfa tutte le formule di  $\Gamma'$ . Visto che  $v$  deve soddisfare  $\neg q \wedge \neg r$ , deve valere che

$$v(q) = 0, \quad v(r) = 0.$$

Inoltre, visto che  $v$  deve soddisfare  $s \wedge \neg r$ , deve valere anche che

$$v(s) = 0.$$

Visto che  $v$  deve soddisfare  $\neg r \Rightarrow p$  e abbiamo che  $v(\neg r) = 1$ , deve per forza valere che

$$v(p) = 1.$$

Analogamente, visto che  $v$  deve soddisfare  $s \Rightarrow (\neg p \vee q)$  e abbiamo  $v(s) = 1$ , deve per forza valere che

$$v(\neg p \vee q) = 1.$$

Da questo segue che o  $v(p) = 0$  oppure  $v(q) = 1$ . Ma in entrambi i casi abbiamo una contraddizione, in quanto sappiamo che  $v(p) = 1$  e  $v(q) = 0$ . Quindi, non può esistere una valutazione che soddisfa tutte le formule in  $\Gamma'$ , come volevasi dimostrare.

*Secondo metodo.* Per verificare che  $\Gamma'$  non è consistente è sufficiente costruire un albero di derivazione con  $\perp$  come conclusione e con gli elementi di  $\Gamma'$  come ipotesi non scaricate. Un tale albero può essere costruito come segue:

$$\frac{\frac{\frac{s \Rightarrow (\neg p \vee q)}{\neg p \vee q} \quad \frac{s \wedge \neg r}{s}}{\perp} \quad \frac{[\neg p]_1 \quad \frac{\neg r \Rightarrow p}{p}}{\perp} \quad \frac{\frac{s \wedge \neg r}{\neg r} \quad \frac{\neg q \wedge \neg r}{\neg q} \quad [q]_2}{\perp}}{\perp} \vee_{E,1,2}$$

Si noti che le ipotesi non scaricate di questo albero sono esattamente gli elementi di  $\Gamma'$ .

## ESERCIZIO 2.

(a) Per dimostrare la prima asserzione, si consideri l'albero

$$\frac{\frac{\frac{[\varphi(t)]_1}{\exists x \varphi(x)} \quad \psi}{\varphi(t) \Rightarrow \psi} \Rightarrow_{I,1}}$$

Per dimostrare la seconda asserzione, si consideri l'albero

$$\frac{\frac{\frac{\forall x (\varphi(x) \Rightarrow \psi_1(x) \vee \psi_2(x))}{\varphi(t) \Rightarrow \psi_1(t) \vee \psi_2(t)} \quad [\varphi(t)]_3 \quad \frac{\neg \psi_1(t) \quad [\psi_1(t)]_1}{\perp} \quad \frac{\neg \psi_2(t) \quad [\psi_2(t)]_2}{\perp}}{\psi_1(t) \vee \psi_2(t)} \quad \perp}{\perp} \vee_{E,1,2} \Rightarrow_{I,3} \neg \varphi(t)$$

(b) Si consideri la struttura per  $L$  con dominio  $\mathbb{N}$  e

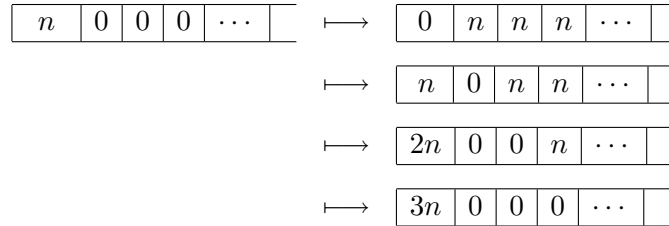
$$\llbracket P \rrbracket =_{\text{def}} \{(n, m) \in \mathbb{N} \mid n \leq m\}.$$

La validità della prima formula è equivalente all'asserzione che esistono numeri naturali  $n$  e  $m$  tali che  $n \leq m$  e  $m \leq n$ , che è vera. Infatti, possiamo prendere per esempio  $n = 3$  e  $m = 3$ . Una qualsiasi altra coppia  $n, m$  con  $n = m$  va altrettanto bene. La validità della seconda formula è equivalente all'asserzione che non per ogni coppia di naturali  $n$  e  $m$  vale sia  $n \leq m$  che  $m \leq n$ . Infatti, se consideriamo  $n = 1$  e  $m = 5$ , vale  $1 \leq 5$  ma non  $5 \leq 1$ . Una qualsiasi altra coppia con  $n \neq m$  va altrettanto bene.

(c) Si vedano le dispense.

ESERCIZIO 3.

- (a) Definiamo  $a =_{\text{def}} 0$  e  $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ponendo  $g(n, p) =_{\text{def}} p + 2n + 1$ , ove  $n, p \in \mathbb{N}$ . La verifica che queste definizioni soddisfano quanto richiesto consiste in una semplice dimostrazione per induzione.
- (b) Un'idea per scrivere il programma è la seguente. Dalla configurazione iniziale, copiamo (azzerandolo) il valore di  $R_1$  in  $R_2, R_3$  e  $R_4$ ; poi, sommiamo successivamente  $R_2, R_3$  e  $R_4$  in  $R_1$ . Schematicamente:



Tale programma può essere scritto nel modo seguente:

- $S_0$  Termina  
 $S_1$  Se  $R_1 = 0$  allora esegui  $S_5$  altrimenti  $R_1 := R_1 - 1$  ed esegui  $S_2$   
 $S_2$   $R_2 := R_2 + 1$  ed esegui  $S_3$   
 $S_3$   $R_3 := R_3 + 1$  ed esegui  $S_4$   
 $S_4$   $R_4 := R_4 + 1$  ed esegui  $S_1$   
 $S_5$  Se  $R_2 = 0$  allora esegui  $S_7$  altrimenti  $R_2 := R_2 - 1$  ed esegui  $S_6$   
 $S_6$   $R_1 := R_1 + 1$  ed esegui  $S_5$   
 $S_7$  Se  $R_3 = 0$  allora esegui  $S_9$  altrimenti  $R_3 := R_3 - 1$  ed esegui  $S_8$   
 $S_8$   $R_1 := R_1 + 1$  ed esegui  $S_7$   
 $S_9$  Se  $R_4 = 0$  allora esegui  $S_0$  altrimenti  $R_4 := R_4 - 1$  ed esegui  $S_{10}$   
 $S_{10}$   $R_1 := R_1 + 1$  ed esegui  $S_9$

Si noti che le istruzioni in  $S_1, S_2, S_3$  e  $S_4$  copiano (azzerandolo) il valore di  $R_1$  in  $R_2, R_3$  e  $R_4$ , le istruzioni in  $S_5$  e  $S_6$  copiano il valore di  $R_2$  in  $R_1$ , le istruzioni in  $S_7$  e  $S_8$  sommano il valore di  $R_3$  a  $R_1$ , ed infine le istruzioni in  $S_9$  e  $S_{10}$  sommano il valore di  $R_4$  a  $R_1$ . Se il valore iniziale di  $R_1$  è zero, passiamo da  $S_1$  a  $S_5$ , a  $S_7$ , a  $S_9$  ed infine ad  $S_0$ , terminando senza mai aver modificato il valore di alcun registro, come opportuno.

- (c) Supponiamo che  $S_1$  e  $S_2$  siano ricorsivi e dimostriamo che  $S_1 \cap S_2$  è ricorsivo. Dall'ipotesi, per la definizione di insieme ricorsivo, sappiamo che le funzioni caratteristiche  $\chi_{S_1}$  e  $\chi_{S_2}$  sono entrambe ricorsive. Ora, osserviamo che

$$\begin{aligned}
 \chi_{S_1 \cap S_2}(x) = 1 & \quad \text{se e solo se} \quad \chi_{S_1}(x) = 1 \text{ e } \chi_{S_2}(x) = 1 \\
 & \quad \text{se e solo se} \quad \chi_{S_1}(x) \cdot \chi_{S_2}(x) = 1
 \end{aligned}$$

Quindi, la funzione  $\chi_{S_1 \cap S_2}$  è la composta di funzioni ricorsive ( $\chi_{S_1}, \chi_{S_2}$  e la moltiplicazione) ed è quindi ricorsiva. Questo dimostra che  $S_1 \cap S_2$  è ricorsivo.

#### ESERCIZIO 4.

- (a) Si vedano le dispense.
- (b) Si vedano le dispense.
- (c) Siano  $a, b_1, b_2$  tre insiemi tali che  $\kappa = \text{card}(a)$ ,  $\lambda_1 = \text{card}(b_1)$  e  $\lambda_2 = \text{card}(b_2)$ . Dobbiamo dimostrare che

$$(b_1 \times b_2)^a \sim b_1^a \times b_2^a$$

A tal fine, definiamo una funzione biiettiva

$$F : (b_1 \times b_2)^a \rightarrow b_1^a \times b_2^a .$$

Dato un elemento  $f \in (b_1 \times b_2)^a$ , ovvero una funzione  $f : a \rightarrow b_1 \times b_2$ , definiamo  $F(f) \in b_1^a \times b_2^a$  come la coppia delle funzioni  $\pi_1 \circ f : a \rightarrow b_1$  e  $\pi_2 \circ f : a \rightarrow b_2$ , ove  $\pi_1$  e  $\pi_2$  sono le due proiezioni dal prodotto cartesiano  $b_1 \times b_2$ . Per dimostrare che  $F$  è biiettiva, definiamone l'inversa

$$G : b_1^a \times b_2^a \rightarrow (b_1 \times b_2)^a .$$

Data una coppia di funzioni  $f_1 : a \rightarrow b_1$  e  $f_2 : a \rightarrow b_2$ ,  $G(f_1, f_2) : a \rightarrow b_1 \times b_2$  è definita come la funzione che mappa  $x \in a$  nella coppia  $(f_1(x), f_2(x)) \in b_1 \times b_2$ . La verifica che  $F$  e  $G$  sono l'una l'inversa dell'altra è omessa.