Esercizi di revisione VI

Nicola Gambino

1 Dicembre 2010

Esercizio 1. Si dimostri che le seguenti formule sono teoremi della logica proposizionale:

(i) $(\varphi \wedge \psi) \vee \chi \Rightarrow (\neg\varphi \Rightarrow \chi)$,

(ii) $(\varphi \Rightarrow (\psi \vee \chi)) \Rightarrow ((\varphi \wedge \neg\psi) \Rightarrow \chi)$.

Esercizio 2. Si consideri l'insieme

$$\Gamma = \{p \Rightarrow \neg q \vee s \, , r \wedge \neg s \, , r \Rightarrow p \, , r \Rightarrow q\} \, .$$

(i) Si dimostri che Γ è inconsistente.

(ii) Si definisca un sottoinsieme $\Gamma' \subseteq \Gamma$ che sia consistente e che contenga almeno tre elementi. Si giustifichi la risposta.

Esercizio 3. Si dimostri che la formula

$$\neg\forall x \neg\varphi(x) \Rightarrow \exists x \varphi(x)$$

è un teorema della logica del primo ordine.

Suggerimento. Si usi la regola per il ragionamento per assurdo.

Esercizio 4. Sia L il linguaggio del primo ordine che contiene solo un simbolo di predicato unario P. Sia φ la formula

$$\neg\forall x P(x) \Rightarrow \forall x \neg P(x)$$

(i) Si definisca una struttura per L in cui φ non è valida.

(ii) È possibile che $\vdash \varphi$? Si giustifichi la risposta.

(iii) È possibile che esista un insieme Γ tale che $\Gamma \vdash \varphi$? Si giustifichi la risposta.

Esercizio 5. Si scriva un programma per macchine a registri che calcola la funzione $f \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $f(m, n) = m \cdot n$.

Suggerimento. Si utilizzi il fatto che $f(m, 0) = 0$ e $f(m, n+1) = f(m, n)+n$.

Esercizio 6. Si dimostri che per ogni insieme a si ha che $\bigcup \mathcal{P}(a) = a$.

Esercizio 7. Ricordando che $\aleph_0 = \mathrm{card}(\mathbb{N})$, si dimostri che $\mathrm{card}(\mathbb{Z}) = \aleph_0$.