Esercizi di revisione II

Nicola Gambino

19 Aprile 2010

Esercizio 1. Costruendo alberi di derivazione, si dimostri che le seguenti formule sono teoremi della logica del primo ordine:

(a) $\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \wedge \neg\varphi(t) \Rightarrow \psi(t)$,

(b) $\neg\exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \wedge \varphi(t) \Rightarrow \neg\psi(t)$,

(c) $\forall x(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)) \wedge \varphi(t) \Rightarrow \psi(t)$,

(d) $(\exists x\varphi(x) \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi(t) \Rightarrow \psi)$.

Esercizio 2. Costruendo opportuni alberi di derivazione si dimostri che

(a) $\{\varphi(t)\,,\psi(t)\} \vdash \neg\forall x(\neg\varphi(x) \wedge \neg\psi(x))$,

(b) $\{\forall x\forall y\varphi(x,y)\} \vdash \forall x\varphi(x,x)$,

(c) $\{\neg\forall x\exists y\varphi(x,y)\} \vdash \exists x\forall y\neg\varphi(x,y)$.

Esercizio 3. Si definiscano strutture in cui le seguenti formule **non** sono valide:

(a) $\forall x\forall y(P(x,y) \Rightarrow P(y,x)) \Rightarrow \forall xP(x,x)$,

(b) $\forall xP(x,x) \Rightarrow (\forall x\forall y(P(x,y) \Rightarrow P(y,x))$,

(c) $\forall xP(x,x) \Rightarrow \forall x\forall yP(x,y)$.

Esercizio 4. Si definisca una struttura che renda valide entrambe le seguenti formule:

$$\forall x\exists y_1\exists y_2(y_1 \neq y_2 \wedge P(x,y_1) \wedge P(x,y_2))\,,$$
$$\forall x\neg\forall yP(x,y).$$

Esercizio 5. Sia L il linguaggio dell'aritmetica di Peano. Si consideri la struttura per L con dominio l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali e in cui l'interpretazione di S, $+$ e $\cdot$ sono le funzioni successore $(x \mapsto x+1)$, somma e prodotto. Quali degli assiomi dell'aritmetica di Peano non sono validi in questa struttura?

Esercizio 6. Sia L il linguaggio della teoria dei gruppi. Si definisca un gruppo in cui la formula

$$\forall x\forall y(x \cdot y = y \cdot x)$$

di L non é valida.