Esercizi di revisione I

Nicola Gambino

18 Marzo 2010

Esercizio 1.

(a) Rispettando le convenzioni introdotte a lezione, si tolga il maggior numero possibile di parentesi nelle seguenti formule:

$$(((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \Rightarrow \varphi_3) \vee \varphi_4)\,,$$
$$(\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \Rightarrow (\varphi_3 \vee \varphi_4))\,,$$
$$((\neg\varphi_1) \wedge (\neg\varphi_2) \Rightarrow (\varphi_3 \vee \varphi_4))\,.$$

(b) Si reinseriscano le parentesi in maniera opportuna nelle seguenti formule, che sono state ottenute eliminando parentesi secondo le convenzioni stabilite a lezione:

$$\varphi_1 \vee \varphi_2 \Rightarrow \neg\psi_1 \wedge \psi_2\,,$$
$$\neg\varphi_1 \wedge \varphi_2 \Rightarrow \psi\,.$$

Esercizio 2.

(a) Si enuncinino le regole di introduzione e di eliminazione per l'implicazione.

(b) Giustificando la risposta, si dica se il seguente albero di derivazione é corretto:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vee \psi \Rightarrow \chi \qquad [\varphi]_1}{\chi}\Rightarrow_E \qquad [\varphi]_1}{\chi \wedge \varphi}\wedge_I}{\varphi \Rightarrow (\chi \wedge \varphi)}\Rightarrow_{I,1}$$

(c) Giustificando la risposta, si dica se il seguente albero di derivazione é corretto:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \Rightarrow \psi \vee \chi]_2 \qquad [\varphi]_1}{\psi \vee \chi}\Rightarrow_E}{\psi}\vee_{E,1}}{\varphi \Rightarrow \chi}\Rightarrow_{I,1}}{(\varphi \Rightarrow \psi \vee \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)}\Rightarrow_{I,2}$$

Esercizio 3. Costruendo opportuni alberi di derivazione, si dimostri che le seguenti formule sono teoremi della logica proposizionale:

$$(\varphi_1 \vee \varphi_2 \Rightarrow \psi_1 \wedge \psi_2) \Rightarrow (\varphi_1 \Rightarrow \psi_1) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \psi_2)\,,$$
$$(\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2 \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2) \Rightarrow \psi)\,,$$
$$((\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))\,.$$

Esercizio 4.

(a) Sia Γ un insieme di formule e φ una formula. Si definisca che cosa significa $\Gamma \vdash \varphi$.

(b) Si dimostri che

$$\{\varphi_1\,, \varphi_2\,, \varphi_3\} \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3\,,$$
$$\{\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2\,, \varphi_2 \Rightarrow \varphi_3\} \vdash \varphi_1 \Rightarrow \varphi_3\,,$$
$$\{\varphi_1 \vee \varphi_2\,, \varphi_2 \vee \varphi_3\} \vdash \neg\varphi_2 \Rightarrow \varphi_1 \wedge \varphi_3\,.$$

Esercizio 5. Si costruiscano le tavole di veritá per le seguenti formule.

$$(p \wedge \neg r) \Rightarrow (q \vee \neg p)\,,$$
$$\neg(p \vee \neg q) \Rightarrow (\neg p \wedge q)\,,$$
$$(p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (q \Rightarrow r)\,.$$

Esercizio 6. Sia Γ un insieme di formule. Si dimostri che Γ é consistente se e solo se esiste una valutazione che soddisfa tutte le formule di Γ.

Suggerimento. Si utilizzino i teoremi di validitá e completezza.

Esercizio 7. Si utilizzi l'Esercizio 6 per stabilire se il seguente insieme di formule é consistente:

$$\{p\,,\ \neg q\,,\ r\,,\ p \vee \neg r\,,\ p \Rightarrow \neg q\,,\ \neg r \Rightarrow p\}\,.$$

Esercizio 8. Si dimostri che se φ é un teorema, allora per ogni insieme Γ si ha che $\Gamma \vdash \varphi$.

Esercizio 9.

(a) Sia Γ un insieme di formule e φ una formula. Si definisca che cosa significa $\Gamma \models \varphi$.

(b) Si dimostri che se $\Gamma \models \varphi_1$ e $\Gamma \models \varphi_2$ allora $\Gamma \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$.