UNIVERSITÀ DI PALERMO
FACOLTÀ DI SCIENZE MM. FF. NN.

ELEMENTI DI LOGICA MATEMATICA - ESAME DEL 28/09/2009

Istruzioni per tutti gli studenti.

- Si prega di scrivere IN STAMPATELLO nome, cognome, numero di matricola, e corso di laurea di appartenenza IN ALTO A DESTRA sulla prima facciata di ogni foglio protocollo che si intende consegnare.
- Non è consentita la consultazione di libri, appunti, dispense.
- Non è consentito l'utilizzo di calcolatrici e telefoni cellulari.

Istruzioni per gli studenti del Corso di Laurea in Matematica.

- Si svolga sia la Parte A che la Parte B.
- Ciascuna contiene esercizi per un totale di 17 punti. Il voto dell'esame V verrà calcolato con la formula $V = \min\{V_A\,, 15\} + \min\{V_B\,, 15\}$, ove V_A e V_B rappresentano i punteggi ottenuti nella Parte A e nella Parte B. La lode verrà assegnata in caso $V = 30$ e $V_A + V_B > 30$.
- La durata dell'esame è di tre ore.

Istruzioni per gli studenti del Corso di Laurea in Informatica.

- Si svolga solo la Parte A.
- La parte A contiene esercizi per un totale di 17 punti. Il voto dell'esame V verrà calcolato con la formula $V = 2 \times \min\{V_A\,, 15\}$, ove V_A rappresenta il punteggio ottenuto nella Parte A. La lode verrà assegnata in caso $V = 30$ e $V_A > 30$.
- La durata dell'esame è di un'ora e mezzo.

PARTE A

ESERCIZIO 1

(a) Costruendo alberi di derivazione, si verifichi che le formule

$$(\phi \vee \psi \Rightarrow \xi) \Rightarrow (\phi \Rightarrow \xi)\,,$$
$$(\neg\phi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \phi)\,,$$

sono teoremi della logica proposizionale. [3]

(b) Costruendo una tavola di verità o un'opportuna valutazione, si verifichi che la formula

$$(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

non è una tautologia della logica proposizionale. [2]

(c) Si enunci il Teorema di Completezza per la logica proposizionale. [3]

ESERCIZIO 2

(a) Costruendo un albero di derivazione, si verifichi che la formula

$$\forall x\big(\phi \Rightarrow \psi(x)\big) \Rightarrow \big(\phi \Rightarrow \forall x \psi(x)\big)\,,$$

ove $x \notin \mathrm{FV}(\phi)$, è un teorema della logica del primo ordine. [3]

(b) Si verifichi che la formula

$$\forall x_1 \forall x_2 \big(x_1 < x_2 \Rightarrow \exists y \big(x_1 < y < x_2\big)\big)$$

è valida in $(\mathbb{Q}, <)$. [3]

(c) Si dia la definizione di struttura per un linguaggio del primo ordine. [3]

PARTE B

ESERCIZIO 3

(a) Si definiscano due funzioni ricorsive $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tali che la funzione ricorsiva $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da

$$\begin{cases} h(m,0) & = & f(m)\,, \\ h(m,n+1) & = & g(m,n,h(m,n))\,, \end{cases}$$

soddisfi $h(m,n) = m + n^3$, per ogni $m, n \in \mathbb{N}$. [3]

(b) Si dimostri che l'insieme $S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ pari}\}$ è ricorsivo. [3]

(c) Sia S un insieme ricorsivamente enumerabile e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione ricorsiva. Si dimostri che l'insieme $\{g(n) \mid n \in S\}$ è ricorsivamente enumerabile. [2]

ESERCIZIO 4

(a) Si enunci l'Assioma dell'Unione. [3]

(b) Siano a, b insiemi. Si dimostri che $\mathcal{P}(a) \cup \mathcal{P}(b) \subseteq \mathcal{P}(a \cup b)$. [3]

(c) Si dimostri che $\mathrm{card}(\mathbb{Z}) = \aleph_0$. [3]