Elementi di Logica Matematica, Logica I, Logica II – Prova scritta del 6/10/2010

COMPITO B

Istruzioni per tutti gli studenti

- Si prega di scrivere a LETTERE MAIUSCOLE nome, cognome, numero di matricola, e corso di laurea su ogni foglio protocollo.
- Non sono consentiti l'utilizzo di calcolatrici, l'uso di telefoni cellulari, la consultazione di libri, appunti o dispense.
- Si prevede che i risultati saranno disponibili nella pagina web del corso nel tardo pomeriggio di giovedì 7 ottobre. La consegna delle prove e la registrazione dei voti sono fissate per le 10:00 di venerdì 8 ottobre presso l'Aula 5 del Dipartimento di Matematica e Informatica.

Istruzioni per gli studenti del Corso di Laurea in Matematica

- Si svolgano gli esercizi della Parte A e della Parte B. Il voto dell'esame è dato dalla formula $V = \min\{V_A\,, 15\} + \min\{V_B\,, 15\}$, ove V_A e V_B sono i punteggi ottenuti nella Parte A e nella Parte B. La lode viene assegnata se $V = 30$ e $V_A + V_B > 30$. La durata della prova è di tre ore.

Istruzioni per gli studenti del Corso di Laurea in Informatica

- *Per chi vuole sostenere solo Logica I o solo Logica II.* Si svolgano solo gli esercizi della Parte A (per Logica I) o della Parte B (per Logica II). La durata della prova è un'ora e mezza. Il voto dell'esame è ottenuto raddoppiando il punteggio ottenuto. La lode viene assegnata se il voto supera 30.
- *Per chi vuole sostenere sia Logica I che Logica II.* Si svolgano prima gli esercizi della Parte A (per Logica I) e poi gli esercizi della Parte B (per Logica II). Per ciascuna parte si ha a disposizione un'ora e mezza. Nel caso non si superi Logica I, la prova di Logica II non sarà valutata. Per ciascun esame, il voto è calcolato raddoppiando il punteggio ottenuto nella parte ad esso corrispondente. La lode viene assegnata se il voto supera 30.

Parte A

Esercizio 1

(a) Costruendo alberi di derivazione, si verifichi che

$$\{\, \varphi \vee \neg\psi\,,\ \varphi \Rightarrow \chi\,,\ \neg\chi \,\} \vdash \neg\psi,$$
$$\vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \Rightarrow \neg(\neg\varphi \Rightarrow \psi)\,.$$

[3]

(b) Siano Γ un insieme di formule e sia φ una formula. Si dimostri che se $\Gamma \models \varphi$ allora, per ogni insieme di formule Γ', $\Gamma \cup \Gamma' \models \varphi$. [2]

(c) Si consideri l'insieme

$$\Gamma = \{\, p \Rightarrow \neg s\,, q \Rightarrow \neg s \wedge r\,, r \vee \neg s\,, \neg r \wedge p \,\}\,.$$

Si dimostri che Γ è consistente. È vero o falso che $\Gamma \cup \{\neg p \vee q\}$ è consistente? Si giustifichi la risposta. [3]

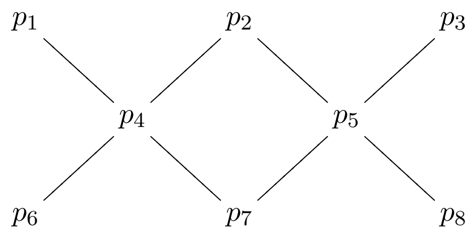
Esercizio 2

(a) Costruendo alberi di derivazione, si verifichi che le seguenti formule

$$\forall x(\varphi(x) \Rightarrow \psi) \Rightarrow \big(\exists x \varphi(x) \Rightarrow \psi\big)\,,$$
$$\forall x(\varphi(x) \land \neg\psi(x)) \Rightarrow \neg\exists x(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))\,.$$

sono teoremi della logica del primo ordine. [3]

(b) Sia $P = \{p_1\,, p_2\,, p_3\,, p_4\,, p_5\,, p_6\,, p_7\,, p_8\}$ e si consideri l'ordine parziale $(P, <)$ definito dal diagramma



Si verifichi che la formula $\forall x_1 \forall x_2 \exists y(x_1 \leq y \land x_2 \leq y)$ non è valida in $(P, <)$. [3]

(c) Si enunci il Teorema di Löwenheim-Skolem Upward. [3]

Parte B

Esercizio 3

(a) Si definiscano $a \in \mathbb{N}$ e una funzione ricorsiva $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tali che la funzione ricorsiva $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da

$$\begin{cases} h(0) & = & a\,, \\ h(n+1) & = & g(n, h(n))\,, \end{cases}$$

soddisfi $h(n) = (n+1)^3$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si giustifichi la risposta. [3]

(b) Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione definita da

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è multiplo di 3,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si scriva un programma per macchine a registri che calcoli f. Si descriva brevemente la definizione del programma. [3]

(c) Si enunci la definizione di insieme ricorsivo. [3]

Esercizio 4

(a) Si enunci l'Assioma della Coppia. [3]

(b) Siano a e b insiemi. Si dimostri che $\mathcal{P}(a) \cup \mathcal{P}(b) \subseteq \mathcal{P}(a \cup b)$. [2]

(c) Siano κ e λ cardinali. Si dimostri che $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$. [3]
