

ELEMENTI DI LOGICA MATEMATICA – PROVA SCRITTA DEL 01/02/2010

Istruzioni

- Si prega di scrivere chiaramente nome, cognome, numero di matricola, e corso di laurea di appartenenza su ogni foglio che si intende consegnare.
 - Non sono consentiti né l'utilizzo di calcolatrici e telefoni cellulari né la consultazione di libri, appunti o dispense.
 - Si svolga sia la Parte A che la Parte B, rispettivamente.
 - Ciascuna parte contiene esercizi per un totale di 17 punti. Il voto dell'esame V verrà calcolato con la formula $V = \min\{V_A, 15\} + \min\{V_B, 15\}$, ove V_A e V_B rappresentano i punteggi ottenuti nella Parte A e nella Parte B. La lode verrà assegnata in caso $V = 30$ e $V_A + V_B > 30$.
 - La durata dell'esame è di tre ore.
-

PARTE A

ESERCIZIO 1

- (a) Costruendo alberi di derivazione, si verifichi che le formule

$$\begin{aligned}(\phi \wedge \psi) &\Rightarrow \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi), \\ (\phi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \neg\chi)) &\Rightarrow (\psi \Rightarrow (\chi \Rightarrow \neg\phi))\end{aligned}$$

sono teoremi della logica proposizionale. [3]

- (b) Sia $\Gamma_1 = \{\neg p, \neg q, r\}$ e $\Gamma_2 = \{\neg p, \neg q, r, p \vee \neg r, q \vee p, \neg r \vee q, r \Rightarrow \neg q, p \wedge q\}$. Si definisca un insieme Γ che sia consistente e tale che $\Gamma_1 \subsetneq \Gamma \subsetneq \Gamma_2$. [3]

- (c) Sia Γ un insieme di formule e ϕ una formula. Si enunci la definizione di $\Gamma \vdash \phi$ e $\Gamma \models \phi$. [3]
-

ESERCIZIO 2

- (a) Costruendo un albero di derivazione, si verifichi che la formula

$$(\exists x \phi(x) \vee \exists x \psi(x)) \Rightarrow \exists x (\phi(x) \vee \psi(x))$$

è un teorema della logica del primo ordine. [2]

- (b) Si dimostri che la formula

$$(\exists x \forall y (x \leq y)) \wedge (\forall x \exists y \exists z (x < y < z))$$

è valida in (\mathbb{N}, \leq) . [3]

- (c) Si enunci il Teorema di Lowenheim-Skolem Upward. [3]
-

PARTE B

ESERCIZIO 3

- (a) Si enunci la definizione di insieme ricorsivo. [2]

- (b) Si definiscano funzioni ricorsive $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tali che la funzione ricorsiva $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definita da

$$\begin{cases} h(m, 0) &= f(m), \\ h(m, n+1) &= g(m, n, h(m, n)), \end{cases}$$

soddisfi $h(m, n) = 2^{m+n}$ per ogni $m, n \in \mathbb{N}$. [3]

- (c) Siano $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. Si dimostri che la funzione polinomiale

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \end{aligned}$$

è ricorsiva. [3]

ESERCIZIO 4

- (a) Si enunci l'Assioma di Separazione. [3]

- (b) Siano a, b insiemi. Si dimostri che $\mathcal{P}(a \cap b) = \mathcal{P}(a) \cap \mathcal{P}(b)$. [3]

- (c) Siano κ, λ, μ cardinali. Si dimostri che $(\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu)$. [3]
-