

Istruzioni per tutti gli studenti

- Si prega di scrivere a LETTERE MAIUSCOLE nome, cognome, numero di matricola, e corso di laurea su ogni foglio protocollo. Non è consentito l'utilizzo di calcolatrici o telefoni cellulari, nè la consultazione di libri, appunti o dispense.
 - I risultati della prova scritta saranno disponibili nella tarda mattinata di domani alla pagina web del corso. La consegna delle prove e la registrazione dei voti sono previste per le 10:30 di mercoledì 20 aprile nello studio del docente del corso.
-

Istruzioni per gli studenti del Corso di Laurea in Matematica

- Si svolgano gli esercizi della Parte A e della Parte B. Il voto della prova è dato dalla formula $V = \min\{V_A, 15\} + \min\{V_B, 15\}$, ove V_A e V_B sono i punteggi ottenuti nella Parte A e nella Parte B. La lode viene assegnata se $V = 30$ e $V_A + V_B > 30$. La durata della prova è di tre ore.
-

Istruzioni per gli studenti del Corso di Laurea in Informatica

- *Per chi vuole sostenere solo Logica I o solo Logica II.* Si svolgano solo gli esercizi della Parte A (per Logica I) o della Parte B (per Logica II). La durata della prova è di un'ora e mezza. Il voto dell'esame è ottenuto raddoppiando il punteggio ottenuto. La lode viene assegnata se il voto supera 30.
 - *Per chi vuole sostenere sia Logica I che Logica II.* Si svolgano prima gli esercizi della Parte A (per Logica I) e poi gli esercizi della Parte B (per Logica II). Per ciascuna parte si ha a disposizione un'ora e mezza. Nel caso non si superi Logica I, la prova di Logica II non sarà valutata. Per ciascun esame, il voto è calcolato raddoppiando il punteggio ottenuto nella parte ad esso corrispondente. La lode viene assegnata se il voto supera 30.
-

Parte A

Esercizio 1

- (a) Costruendo opportuni alberi di derivazione, si dimostrino le seguenti asserzioni

$$\begin{aligned} & \{\varphi \Rightarrow \psi \vee \chi, \neg\psi\} \vdash \varphi \Rightarrow \chi, \\ & \vdash (\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow (\neg\varphi \Leftrightarrow \neg\psi). \end{aligned} \quad [3]$$

- (b) Sia Γ l'insieme di formule proposizionali definito da

$$\Gamma =_{\text{def}} \{\neg p \vee q, r \vee s, s \Rightarrow p \wedge \neg q, \neg r\}.$$

Si dimostri che Γ è inconsistente. Si definisca un sottoinsieme $\Gamma' \subseteq \Gamma$ che sia consistente e che contenga almeno tre elementi. [3]

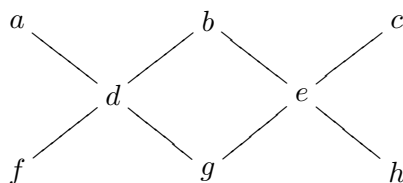
- (c) Siano Γ un insieme di formule proposizionali e φ una formula proposizionale tali che $\Gamma \vdash \varphi$. Si dimostri che per ogni insieme di formule proposizionali Γ' , se $\Gamma \subseteq \Gamma'$ allora $\Gamma' \vdash \varphi$. [3]
-

Esercizio 2

- (a) Costruendo alberi di derivazione, si dimostrino le seguenti asserzioni

$$\begin{aligned} \{\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)), \forall x\neg\varphi(x)\} &\vdash \exists x\psi(x) \\ \{\forall x(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)), \forall x\varphi(x)\} &\vdash \forall x\psi(x) \end{aligned} \quad [3]$$

- (b) Sia $P =_{\text{def}} \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ e si consideri l'ordine parziale su P definito dal diagramma



Si dimostri che la formula

$$(\exists x)(\exists y)(\exists z_1)(\exists z_2)((x < z_1 < y) \wedge (x < z_2 < y) \wedge (z_1 \neq z_2))$$

è valida in $(P, <)$. [3]

- (c) Si enunci il Teorema di Compattezza. [2]

Parte B

Esercizio 3

- (a) Si definisca un elemento $a \in \mathbb{N}$ e una funzione ricorsiva $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tali che la funzione ricorsiva $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definita dalle clausole

$$\begin{aligned} h(0) &= a, \\ h(n+1) &= g(n, h(n)), \end{aligned}$$

sia tale che $h(n) = 2^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si giustifichi la risposta. [3]

- (b) Si enunci la definizione di funzione calcolabile. [3]

- (c) Si dimostri che l'insieme $S =_{\text{def}} \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è pari}\}$ è ricorsivo. [3]

Esercizio 4

- (a) Si enunci l'Assioma della Coppia. [3]

- (b) Siano X e Y due insiemi. Si dimostri che $\mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X \cap Y)$. [2]

- (c) Sia κ un cardinale. Si dimostri che $\kappa \leq 2^\kappa$. [3]
-